

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Начальник
учебно-методического отдела
Т.Ф. Артеменко**

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Комплексный анализ
по направлению:	Математика
профиль подготовки:	Фундаментальная математика Высшая школа современной математики Высшая школа современной математики
курс:	2
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 54 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 144, всего зач. ед.: 4

Программу составили:

А.Н. Соболевский, д-р физ.-мат. наук

М.Л. Бланк, д-р физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании Высшая школа современной математики 02.09.2024

Аннотация

Курс представляет собой введение в одномерный комплексный анализ. Мы делаем акцент на геометрическую интуицию и на связи излагаемого материала с другими математическими и физическими дисциплинами.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Изучение одномерного комплексного анализа для дальнейшего использования в других математических дисциплинах аналитического цикла; формирование математической культуры, исследовательских навыков. в том числе для решения вычислительных задач, и способности применять знания на практике.

Задачи дисциплины

- приобретение слушателями теоретических знаний и практических умений и навыков в области одномерного комплексного анализа;
- подготовка слушателей к изучению смежных математических дисциплин;
- приобретение навыков в соотнесении результатов комплексного анализа с контекстом других математических дисциплин

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-3 Способен проверять корректность математического доказательства, строить логически последовательные цепочки	ПК-3.1 Способен к формальной записи рассуждения в терминах логики предикатов
	ПК-3.2 Владеет понятием о математически строгом доказательстве, способен различать строгие и нестрогие рассуждения

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

Основные понятия одномерного комплексного анализа.

уметь:

Разбирать конкретные примеры и проводить необходимые вычисления.

владеть:

Свободно владеть техническим инструментарием, необходимым для самостоятельной работы с функциями одной переменной.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Дифференцируемость и конформные отображения.	2	2		4
2	Конформные автоморфизмы круга, плоскости и сферы.	2	2		4
3	Интеграл по кривой и первообразная.	2	2		4
4	Интегральная формула Коши.	2	2		4
5	Голоморфные функции.	2	2		4
6	Свойства голоморфных функций.	2	2		4
7	Ряды Лорана.	2	2		4
8	Вычеты.	2	2		4
9	Аналитическое продолжение.	2	2		4
10	Ветви голоморфных функций.	2	2		3
11	Особые точки.	2	2		3
12	Теорема Римана о конформном отображении.	2	2		3
13	Гармонические функции двух переменных.	2	2		3
14	Применение комплексного анализа к описанию течения идеальной жидкости.	2	2		3
15	Соответствие границ и продолжение голоморфных функций.	2	2		3
Итого часов		30	30		54
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		144 час., 4 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

1. Дифференцируемость и конформные отображения.

Связь между дифференцируемостью над полями вещественных и комплексных чисел.
Комплексные теоремы о неявной и обратной функции.
Конформность отображения в точке, связь с дифференцируемостью.
Конформное отображение области.

2. Конформные автоморфизмы круга, плоскости и сферы.

Группы конформных автоморфизмов сферы и плоскости.
Лемма Шварца.
Аutomорфизмы круга.
Неэквивалентность сферы, плоскости и круга друг другу.

3. Интеграл по кривой и первообразная.

Интеграл по кривой, первообразная и формула Ньютона-Лейбница.
Критерий существования первообразной.
Лемма Гурса.
Теорема о существовании первообразной.
Интегральная теорема Коши для односвязной области.

4. Интегральная формула Коши.

Интегральная теорема Коши для многосвязной области.
Интегральная формула Коши.
Теорема о разложении в ряд Тейлора.
Неравенства Коши.
Теорема Лиувилля.

5. Голоморфные функции.

Теорема о дифференцировании степенных рядов над полем комплексных чисел.
Четыре определения голоморфной функции, теорема Мореры.

6. Свойства голоморфных функций.

Свойства голоморфных функций: бесконечная дифференцируемость, теорема единственности, принцип максимума, теорема о среднем.
Сходимость в пространстве функций, голоморфных в области; теорема Вейерштрасса.
Принцип компактности.

7. Ряды Лорана.

Ряды Лорана: кольцо сходимости, теоремы о разложении функции, голоморфной в кольце, единственность, неравенства Коши.
Изолированные особые точки, их классификация.
Теорема Сохоцкого.

8. Вычеты.

Теорема о вычетах.
Вычисление вычетов в полюсах.
Порядок функции в точке, связь с логарифмическим вычетом.

Принцип аргумента и теорема Руше.

9. Аналитическое продолжение.

Принцип открытости.

Критерий локальной однолиственности.

Теорема Гурвица о пределе однолистных функций.

Аналитическое продолжение элемента по цепочке.

Аналитическое продолжение ростка вдоль пути.

Единственность продолжения вдоль пути.

Теорема о продолжении по гомотопным путям.

10. Ветви голоморфных функций.

Полная аналитическая функция.

Теорема Пуанкаре-Вольтерра.

Функция, аналитическая в области (ветвь).

Изолированная особая точка ветви.

11. Особые точки.

Особые точки логарифма и функции, мероморфной в области.

Разложение в ряд Льюэна, дифференцирование и интегрирование многозначных функций.

Первообразная голоморфной функции в неодносвязной области, критерий однозначности.

12. Теорема Римана о конформном отображении.

Теорема Римана о конформном отображении.

Способы однозначного выбора конформного отображения на круг.

13. Гармонические функции двух переменных.

Гармонические функции двух переменных, их связь с голоморфными.

Основные свойства: теорема о среднем, бесконечная дифференцируемость, теорема единственности, принцип максимума.

14. Применение комплексного анализа к описанию течения идеальной жидкости.

Описание плоского стационарного движения несжимаемой жидкости.

Комплексный потенциал.

Примеры: источник, вихрь, диполь.

Физическое "доказательство" теоремы Римана.

15. Соответствие границ и продолжение голоморфных функций.

Теорема Каратеодори о соответствии границ.

Достижимые граничные точки.

"Обратная" теорема о соответствии границ.

Лемма о "склеивании" голоморфных функций, принцип симметрии.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиа проектором, экраном и микрофоном.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Методы теории функций комплексного переменного [Текст] : учеб. пособие для вузов / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат .— 5-е изд., испр. — М. : Наука, 1987, 2002 .— 688 с.
2. Введение в комплексный анализ [Текст] : в 2 ч. Ч. 1 : Функции одного переменного : учеб. пособие для вузов / Б. В. Шабат .— 3-е изд, перераб. и доп. — М. : Наука, 1985 .— 336 с.

Дополнительная литература

1. Введение в комплексный анализ [Текст] : в 2 ч. Ч. 2 : Функции нескольких переменных : учеб. пособие для вузов / Б. В. Шабат .— 3-е изд, перераб. и доп. — М. : Наука, 1985 .— 464 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<https://old.mccme.ru/iun/courses.php>

<https://library.mccme.ru/>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных и практических (семинарских) занятиях могут использоваться мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций, а также технологии дистанционной аудиовидеоконференцсвязи.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Методические указания приводятся в разрабатываемых аудиторных и домашних раздаточных материалах (листочках).

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Математика
профиль подготовки: Фундаментальная математика
Высшая школа современной математики
Высшая школа современной математики
курс: 2
квалификация: бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен

Разработчики:

А.Н. Соболевский, д-р физ.-мат. наук

М.Л. Бланк, д-р физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-3 Способен проверять корректность математического доказательства, строить логически последовательные цепочки рассуждений	ПК-3.1 Способен к формальной записи рассуждения в терминах логики предикатов
	ПК-3.2 Владеет понятием о математически строгом доказательстве, способен различать строгие и нестрогие рассуждения
	ПК-3.3 Способен выявлять использованные при доказательстве предположения и предпосылки, в том числе неявные, и контролировать их корректность

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Комплексный анализ» обучающийся должен:

знать:

Основные понятия одномерного комплексного анализа.

уметь:

Разбирать конкретные примеры и проводить необходимые вычисления.

владеть:

Свободно владеть техническим инструментарием, необходимым для самостоятельной работы с функциями одной переменной.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по материалу предыдущего занятия.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Связь между дифференцируемостью над полями вещественных и комплексных чисел. Комплексные теоремы о неявной и обратной функции. Конформность отображения в точке, связь с дифференцируемостью. Конформное отображение области
2. Группы конформных автоморфизмов сферы и плоскости, лемма Шварца, автоморфизмы круга. Неэквивалентность сферы, плоскости и круга друг другу
3. Интеграл по кривой, первообразная и формула Ньютона-Лейбница. Критерий существования первообразной. Лемма Гурса, теорема о существовании первообразной, интегральная теорема Коши для односвязной области
4. Интегральная теорема Коши для многосвязной области. Интегральная формула Коши. Теорема о разложении в ряд Тейлора, неравенства Коши. теорема Лиувилля
5. Теорема о дифференцировании степенных рядов над полем комплексных чисел. Четыре определения голоморфной функции, теорема Мореры
6. Свойства голоморфных функций: бесконечная дифференцируемость, теорема единственности, принцип максимума, теорема о среднем. Сходимость в пространстве функций, голоморфных в области; теорема Вейерштрасса. Принцип компактности
7. Ряды Лорана: кольцо сходимости, теоремы о разложении функции, голоморфной в кольце, единственность, неравенства Коши. Изолированные особые точки, их классификация. Теорема Сохоцкого
8. Теорема о вычетах, вычисление вычетов в полюсах. Порядок функции в точке, связь с логарифмическим вычетом. Принцип аргумента и теорема Руше
9. Принцип открытости, критерий локальной однолистности, теорема Гурвица о пределе однолистных функций. Аналитическое продолжение элемента по цепочке, аналитическое продолжение ростка вдоль пути. Единственность продолжения вдоль пути. Теорема о продолжении по гомотопным путям
10. Полная аналитическая функция, теорема Пуанкаре-Вольтерра. Функция, аналитическая в области (ветвь). Изолированная особая точка ветви
11. Особые точки логарифма и функции, мероморфной в области. Разложение в ряд Пуанкаре, дифференцирование и интегрирование многозначных функций. Первообразная голоморфной функции в неодносвязной области, критерий однозначности
12. Теорема Римана о конформном отображении. Способы однозначного выбора конформного отображения на круг.
13. Гармонические функции двух переменных, их связь с голоморфными. Основные свойства: теорема о среднем, бесконечная дифференцируемость, теорема единственности, принцип максимума,
14. Описание плоского стационарного движения несжимаемой жидкости. Комплексный потенциал. Примеры: источник, вихрь, диполь. Физическое "доказательство" теоремы Римана
15. Теорема Каратеодори о соответствии границ. Достижимые граничные точки. "Обратная" теорема о соответствии границ. Лемма о "склеивке" голоморфных функций, принцип симметрии

Пример экзаменационного билета:

- 1) Ряды Лорана.
- 2) Аналитическое продолжение вдоль пути.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Зачет проводится по итогам текущей успеваемости и сдачи заданий, предусмотренных программой дисциплины.

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 40 минут на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не может продолжаться более двух астрономических часов.

Во время проведения экзамена и зачета обучающимся запрещается пользоваться помощью других лиц и мобильными телефонами, разрешается пользоваться программой учебной дисциплины и справочной литературой по выбору экзаменатора.